

Hoch-, Tief- und Wendepunkte

Eine der wichtigsten Fähigkeiten im Teilbereich Analysis besteht darin, die Hoch-, Tief- und Wendepunkte einer Funktion bestimmen können.

Sie sollten wissen, wie man die Hoch-, Tief- und Wendepunkte

- „von Hand“ berechnet
- mit dem Taschenrechner (GTR oder Classpad) berechnet

Beide Fähigkeiten werden wir wiederholen und anschließend wieder direkt zu den Abi-Aufgaben wechseln, diesmal verstärkt zu den Wahlteilen,

Hoch- und Tiefpunkte

Notwendiges Kriterium:

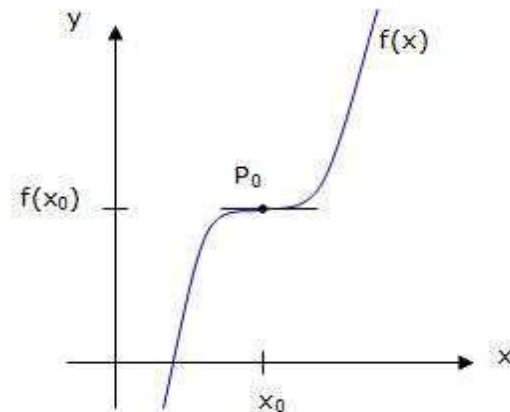
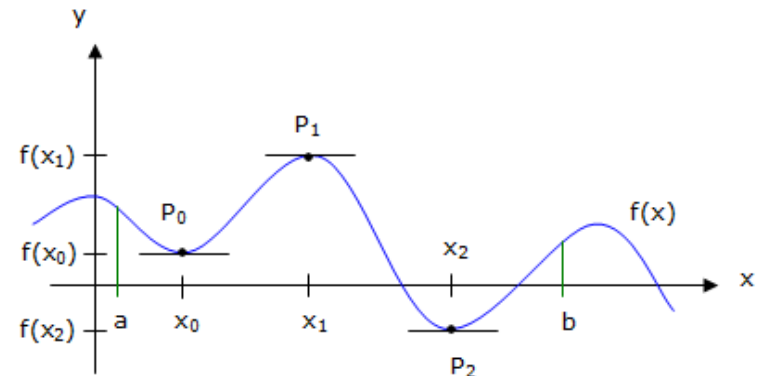
$$f'(x) = 0$$

Mit $f'(x) = 0$ bekommt man auch **Sattelpunkte**!

Die Bedingung $f'(x) = 0$ reicht alleine nicht aus!

Hinreichendes Kriterium:

$$f''(x) \neq 0$$



Klassifizierung von Extrempunkten

$f''(x) < 0$ liefert einen Hochpunkt.
 $f''(x) > 0$ liefert einen Tiefpunkt.

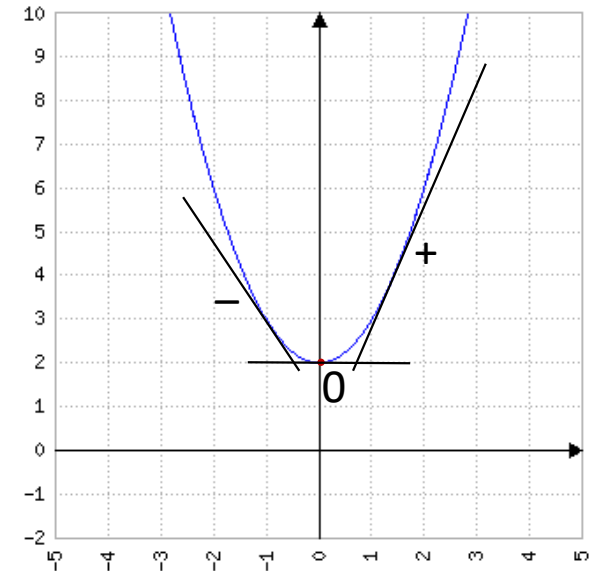
Andere Möglichkeit:

Vorzeichenwechsel bei f' von + nach –

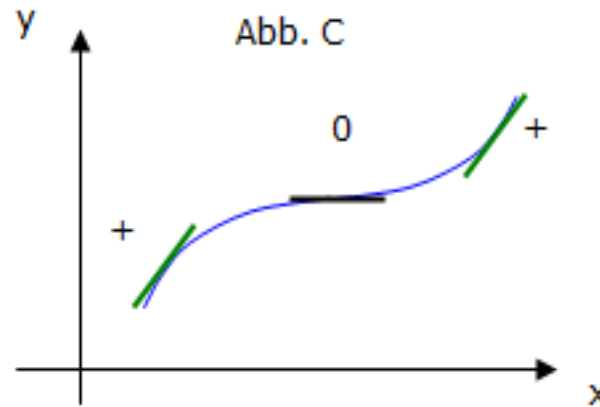
⇒ **Hochpunkt**

Vorzeichenwechsel bei f' von – nach +

⇒ **Tiefpunkt**



Klassifizierung von Extrempunkten



Bei einem Sattelpunkt findet kein Vorzeichenwechsel der Steigung statt!

Verfahren „von Hand“

Zur Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten gehen Sie wie folgt vor:

- 1) Löse $f'(x) = 0$ und erhalte $x_1, x_2, \dots$
- 2) Prüfe jede der oben gefundenen Lösungen mit f'' :
 - Ist $f''(x) = 0$, so liegt **kein** Extrempunkt vor.
 - Ist $f''(x) < 0$, so liegt ein Hochpunkt vor.
 - Ist $f''(x) > 0$, so liegt ein Tiefpunkt vor.
- 3) Die y -Koordinate des Hoch- oder Tiefpunktes erhalten Sie durch Einsetzen des in 1) gefundenen x -Wertes in $f(x)$.

Rechenbeispiel

Bestimme alle Extrempunkte der Funktion $f(x) = x^3 - 12x$.

Lösung:

$$f'(x) = 3x^2 - 12, f''(x) = 6x$$

Mit $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ folgt $3x^2 = 12$ bzw. $x^2 = 4$ und damit $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

Dies sind die **Kandidaten** für unsere Extremstellen.

Ob es sich wirklich um Extremstellen handelt müssen wir mit dem zweiten Kriterium erst noch prüfen!

Rechenbeispiel

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 \\x_2 &= -2 \\f''(x) &= 6x \\f(x) &= x^3 - 12x\end{aligned}$$

Prüfung $x_1 = 2$:

$f''(2) = 12 > 0$. Somit liegt bei $x_1 = 2$ ein Tiefpunkt vor.

$$y = f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16 \Rightarrow T(2 | -16)$$

Prüfung $x_2 = -2$:

$f''(-2) = -12 < 0$. Somit liegt bei $x_2 = -2$ ein Hochpunkt vor.

$$y = f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16 \Rightarrow H(-2 | 16)$$

Ergebnis:

$T(2 | -16)$ und $H(-2 | 16)$ sind die gesuchten Extrempunkte.

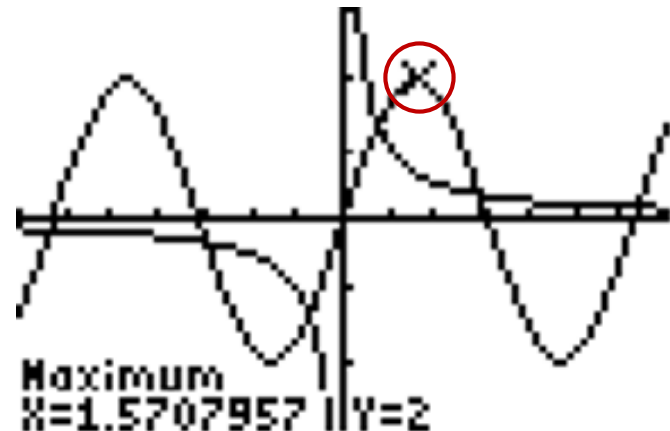
Extrempunkte mit dem GTR

Über **2ND CALC min** bzw. **2ND CALC max** kann man Minima bzw. Maxima einer Funktion bestimmen.

Man gibt dabei zuerst die linke, dann die rechte Intervallgrenze an (mit den Pfeiltasten oder durch Eingabe der x-Werte von Hand).

Jede Eingabe wird mit **ENTER** abgeschlossen.

Ein letztes **ENTER** startet die Berechnung.



Rechenbeispiel mit dem GTR

Bestimme alle Extrempunkte der Funktion $f(x) = x^3 - 12x$.

Lösung:

Geben Sie über die Taste Y= im Y-Editor bei Y_1 den Funktionsterm ein.

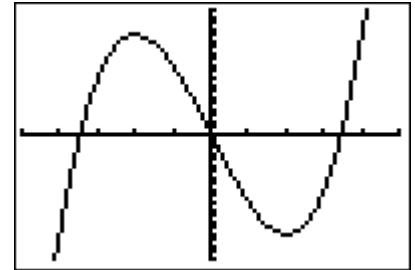
Über die Taste WINDOW legen Sie die Ausschnitt des Koordinatensystems fest, etwa wie in der Abbildung gezeigt.

Plot1	Plot2	Plot3
\Y1 X^3-12X		
\Y2=		
\Y3=		
\Y4=		
\Y5=		

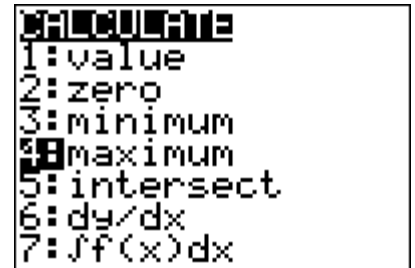
WINDOW
Xmin=-5
Xmax=5
Xscl=1
Ymin=-20
Ymax=20
Yscl=1
↓Xres=1

Rechenbeispiel mit dem GTR

Mit der Taste GRAPH lassen Sie sich den Graphen der Funktion zeichnen.



Mit den Tasten 2ND CALC (über der TRACE-Taste) wählen Sie z.B. maximum und drücken ENTER.



Rechenbeispiel mit dem GTR

Mit den Pfeiltasten wählen Sie zuerst die linke, dann die rechte Intervallgrenze und bestätigen Sie jeweils mit ENTER.

Um den Berechnungsvorgang zu starten, tippen Sie erneut ENTER.

Der GTR zeigt nun das Maximum an und Sie können im Display unten die Koordinaten ablesen.

